同济大学课程考核试卷（A 卷）

答案：

一、填空题（每小题 5 分，共 20 分）

1．答：$\omega = \sqrt{\dfrac{a_{\text{n}}}{0.5}} = \sqrt{10}$ 1/s ； **[2 分]**

$\alpha = \dfrac{a_{\text{t}}}{0.5} = 10\sqrt{3}$ 1/s^2 。 **[5 分]**

（图略）。

2．答：$p = \dfrac{3PL\omega}{4g}$，延长线垂直 O_1A，向右下； **[2 分]**

$L_O = \dfrac{3PL^2\omega}{8g}$，逆时针方向； **[3.5 分]**

$T = \dfrac{9PL^2\omega^2}{32g}$ 。 **[5 分]**

3．答：$\dfrac{Pl\alpha}{2g}$，铅直向上 ； **[2.5 分]**

$\dfrac{2l}{3}$ （图略）。 **[5 分]**

4．答：$(F_A-3F_B)b$。 **[4 分]**

$k=1$ **[5 分]**

二、计算题（15 分）

解：

AB 杆的速度瞬心在 C 点

$v_A = AC\omega_{AB}$

故 $\omega_{AB} = \dfrac{v_A}{AC} = \dfrac{2\sqrt{3}R\omega_0}{3L}$ （逆钟向） **[5 分]**

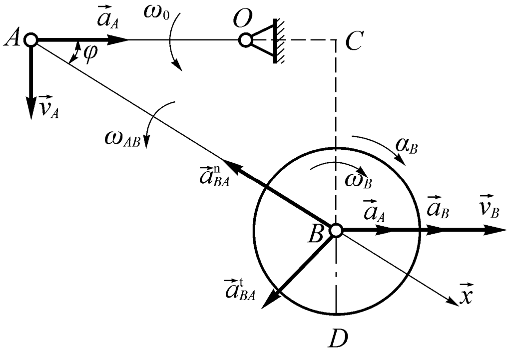
$\omega_B = \dfrac{v_B}{r} = \dfrac{\sqrt{3}R\omega_0}{3r}$ （顺钟向） **[8 分]**

$a_A = R\omega_0^2$，以 A 为基点，有

$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\text{n}} + \vec{a}_{BA}^{\text{t}}$

将上式向 x 轴投影，得

$a_B \cos 30^\circ = a_A \cos 30^\circ - a_{BA}^{\text{n}} + 0$



$$a_B = R\omega_0^2\left(1-\frac{8\sqrt{3}R}{9L}\right)$$

$$\alpha_B = \frac{a_B}{r} = \left(1-\frac{8\sqrt{3}R}{9L}\right)\times\frac{R\omega_0^2}{r}$$

（当 $\left(1-\frac{8\sqrt{3}R}{9L}\right) \rangle 0$ 时，顺钟向）

[15 分]

三、计算题（15 分）

解：

动点：滑块 D，动系：圆轮 A

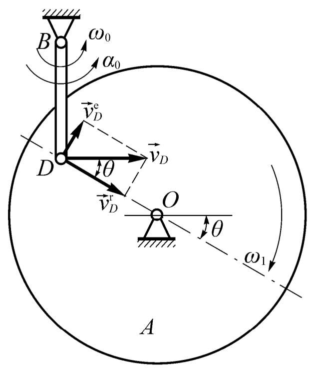
$$\vec{v}_D = \vec{v}_D^{\mathrm{e}} + \vec{v}_D^{\mathrm{r}}$$

$$v_D = 2L\omega_0,\quad v_D^{\mathrm{e}} = L\omega_0,\quad v_D^{\mathrm{r}} = \sqrt{3}L\omega_0$$

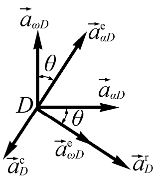
$$\omega_1 = \frac{v_D^{\mathrm{e}}}{2L} = \frac{\omega_0}{2}$$ (顺钟向) **[8 分]**

又有 $a_{\alpha D} = 2L\alpha_0,\quad a_{\omega D} = 2L\omega_0^2$

$$a_D^{\mathrm{c}} = 2\omega_1 v_D^{\mathrm{r}} = \sqrt{3}\,L\omega_0^2$$



(a)



(b)

$$\vec{a}_{\alpha D} + \vec{a}_{\omega D} = \vec{a}_{\alpha D}^{\mathrm{e}} + \vec{a}_{\omega D}^{\mathrm{e}} + \vec{a}_D^{\mathrm{r}} + \vec{a}_D^{\mathrm{c}}$$

在 $\vec{a}_{\alpha D}^{\mathrm{e}}$ 方向上投影：$a_{\alpha D}\cos 60^\circ + a_{\omega D}\sin 60^\circ = a_{\alpha D}^{\mathrm{e}} - a_D^{\mathrm{c}}$

得 $a_{\alpha D}^{\mathrm{e}} = L\alpha_0 + 2\sqrt{3}L\omega_0^2$，$\alpha_1 = \frac{a_{\alpha D}^{\mathrm{e}}}{2L} = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sqrt{3}\omega_0^2$ **[15 分]**

四、计算题（20 分）

解：对系统按质点系动能定理：$\mathrm{d}T = \Sigma\,\delta W_i$

$$T = \frac{1}{2}m_2 v_B^{\,2} + \frac{1}{2}J_B\omega_B^{\,2} + \frac{1}{2}J_A\omega_A^{\,2} = v_B^{\,2}\left(m_1 + \frac{3m_2}{4}\right)$$

$$\Sigma\,\delta W_i = \frac{M\cdot 2\mathrm{d}s}{r} - m_2 g\,\mathrm{d}s$$

由 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=\mathrm{d}\,\delta\, W_i$ 可得：$a_{\mathrm{B}}=\dfrac{2(\frac{2M}{r}-m_2 g)}{4m_1+3m_2}$ **[8]**

对轮 C 按定轴转动动力学方程：

$J_C\,\alpha_C=M-F_1 r$

因为 $J_C=0$，所以 $\alpha_C=0$ ，得： $F_1=\frac{M}{r}$ **[12]**

对轮 A 和轮 B 按动量定理：

由 $\frac{\mathrm{d}P_x}{\mathrm{d}t}=\Sigma F_x$

$0=F_{Ax}+F_1\cdot\cos\beta$

得：$F_{Ax}=-\frac{M\cdot\cos\beta}{r}$ (←) **[16]**

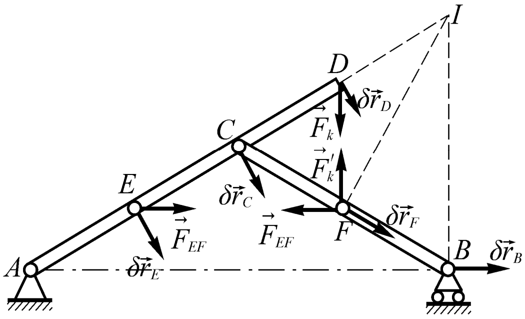
由 $\frac{\mathrm{d}P_y}{\mathrm{d}t}=\Sigma F_y$

$(m_2 v_{\mathrm{B}})=F_{Ay}-m_1 g-m_2\mathrm{g}-F_1\sin\beta$

得：$F_{Ay}=m_1 g+m_2 g+\frac{M\cdot\sin\beta}{r}+\dfrac{2m_2(\frac{2M}{r}-m_2 g)}{4m_1+3m_2}$ **[20]**

五、**计算题**（15 分）

解：



$F_{EF}=F'_{EF}$

$\frac{\delta r_E}{L}=\frac{\delta r_C}{2L}=\frac{\delta r_D}{3L}$,

$\frac{\delta r_C}{IC}=\frac{\delta r_F}{IF}=\frac{\delta r_B}{IB}$,

$IC=IB=2L$

$IF=\sqrt{3}L$

由虚位移原理有：

$F_{EF}\delta r_E\sin\beta-F'_{EF}\delta r_F\cos\beta-F'_K\delta r_F\sin\beta+F_K\delta r_D\cos\beta=0$

得： $F_{EF}=\sqrt{3}F_K$

$F_K=k(2L\sin\beta-L_0)=1000\ \mathrm{N}$

$F_{EF}=1732\ \mathrm{N}$ ［15］

六、计算题（15 分）

解：

以θ_1和θ_2为广义坐标，系统在一般位置时的动能和势能

$$T=\frac{1}{2}(\frac{3}{2}m_2r^2)\dot{\theta}_2^2+\frac{1}{2}m_1(\dot{\theta}_1r+\dot{\theta}_2r)^2+\frac{1}{2}(m_1r^2)\dot{\theta}_1^2$$

$$V=-m_1g(\theta_2r+\theta_1r)$$ **[6]**

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}_1}=m_1r^2\dot{\theta}_1+m_1r^2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\text{，}\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}_1}=2m_1r^2\ddot{\theta}_1+m_1r^2\ddot{\theta}_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial\theta_1}=0\text{，}\quad \frac{\partial V}{\partial\theta_1}=-m_1gr$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}_2}=\frac{3}{2}m_2r^2\dot{\theta}_2+m_1r^2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\text{，}\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}_2}=m_1r^2\ddot{\theta}_1+(m_1+\frac{3}{2}m_2)r^2\ddot{\theta}_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial\theta_2}=0\text{，}\quad \frac{\partial V}{\partial\theta_2}=-m_1gr$$ **[12]**

代入第二类拉格朗日方程可得系统的运动微分方程

$$2m_1r^2\ddot{\theta}_1+m_1r^2\ddot{\theta}_2-m_1gr=0$$

$$m_1r^2\ddot{\theta}_1+(m_1+\frac{3}{2}m_2)r^2\ddot{\theta}_2-m_1gr=0$$

由上解得：

薄壁圆筒 A 的角加速度 $\ddot{\theta}_1=\dfrac{3m_2g}{2(m_1+3m_2)r}$

圆柱 B 的角加速度 $\ddot{\theta}_2=\dfrac{m_1g}{(m_1+3m_2)r}$ **[15]**