同济大学课程考核试卷（A 卷）答案

2006— 2007 学年第一学期

命题教师签名：　　　　　　　　　　　审核教师签名：

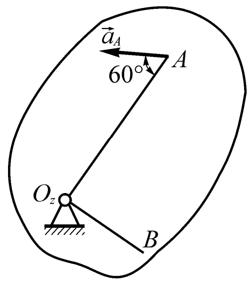
课号：　　　　　　　课名：工程力学　　　　　　　考试考查：

此卷选为：期中考试(　)、期终考试(　)、重考(　)试卷

年级_____专业____________________学号_________姓名____________得分_________

一、　填空题（每题 5 分，共 30 分）

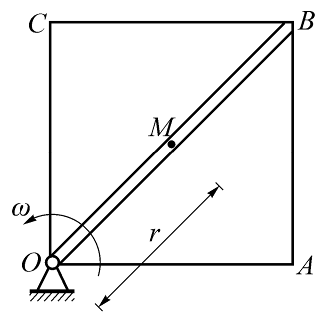
1 刚体绕 O_Z 轴转动，在垂直于转动轴的某平面上有 A，B 两点，已知 $O_ZA=2O_ZB$，某瞬时 $a_A=10\text{m/s}^2$，方向如图所示。则此时 B 点加速度的大小为________________________（方向要在图上表示出来）。



答：5m/s^2　；　　　　　　　　　　　　[4 分]

　　与 O_zB 成 60 度角。　　　　　　　　[5 分]

2 刻有直槽 OB 的正方形板 $OABC$ 在图示平面内绕 O 轴转动，点 M 以 $r=OM=50t^2$（r 以 mm 计）的规律在槽内运动，若 $\omega=\sqrt{2}t$（ω以 rad/s 计），则当 t=1s 时，点 M 的相对加速度的大小为______________；牵连加速度的大小为___________________。科氏加速度为_________________，方向应在图中画出。

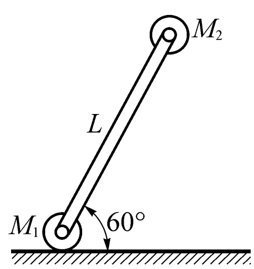


答：0.1m/s^2；1.6248m/s^2。$0.2\sqrt{2}\ \text{m/s}^2$(图略)　；　[4 分]

　　方向垂直 OB，指向左上方。　　　　　　[5 分]

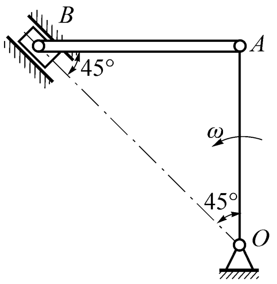
3 质量分别为 $m_1=m$，$m_2=2m$ 的两个小球 M_1，M_2 用长为 L 而重量不计的刚杆相连。现将 M_1 置于光滑水平面上，且 M_1M_2 与水平面成 60° 角。则当无初速释放，M_2 球落地时，M_1 球移动的水平距离为______________。

（1）$\dfrac{L}{3}$；　　（2）$\dfrac{L}{4}$；　　（3）$\dfrac{L}{6}$；　　（4）0。



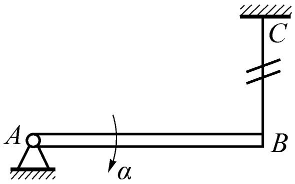
答：（1）。

4 已知 $OA=AB=L$，ω=常数，均质连杆 AB 的质量为 m，曲柄 OA，滑块 B 的质量不计。则图示瞬时，相对于杆 AB 的质心 C 的动量矩的大小为____。



答：$L_C = \dfrac{mL^2\omega}{12}$，（顺时针方向）。

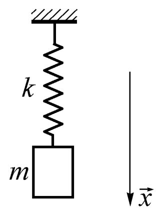
5 均质细杆 AB 重 P，长 L，置于水平位置，若在绳 BC 突然剪断瞬时有角加速度α，则杆上各点惯性力的合力的大小为____________，作用点的位置在离 A 端____________处，并在图中画出该惯性力。



答：$\dfrac{PL\alpha}{2g}$，铅直向上　； [2.5 分]

$\dfrac{2L}{3}$　（图略）。 [5 分]

6 铅垂悬挂的质量--弹簧系统，其质量为 m，弹簧刚度系数为 k，若坐标原点分别取在弹簧静伸长处和未伸长处，则质点的运动微分方程可分别写成 ____ 和 ____。

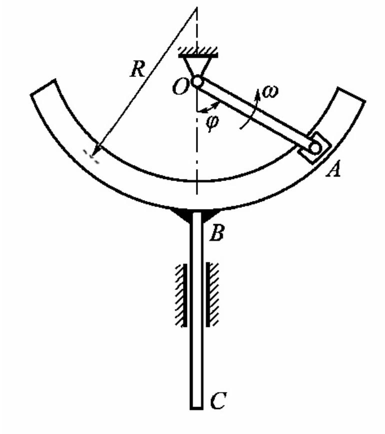


答：$m\ddot{x}+kx=0$；

[2.5 分]

$m\ddot{x}+kx=mg$ 。 [5 分]

二、 计算题（10 分）



图示系统中，曲柄 OA 以匀角速度 ω 绕 O 轴转动，通过滑块 A 带动半圆形滑道 BC 作铅垂平动。已知：$OA = r = 10$ cm，$\omega = 1$ rad/s，$R = 20$ cm。试求 $\varphi = 60^\circ$ 时杆 BC 的加速度。

解：

动点：滑块 A，动系：滑道 BC，牵连平动

由正弦定理得： $\beta = 34.34^\circ$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_A^{\mathrm{e}} + \vec{v}_A^{\mathrm{r}}$$

$$\frac{v_A^{\mathrm{e}}}{\sin\beta} = \frac{v_A^{\mathrm{r}}}{\sin 30^\circ} = \frac{v_A}{\sin 115.66^\circ}$$

$$v_A^{\mathrm{r}} = \frac{v_A}{2\sin 115.66^\circ} = 5.55\ \mathrm{cm/s}$$ [5 分]

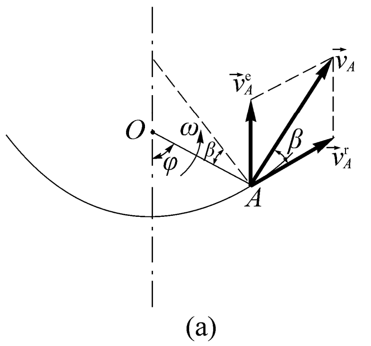
$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{\mathrm{e}} + \vec{a}_{\omega A}^{\mathrm{r}} + \vec{a}_{\alpha A}^{\mathrm{r}}$$

向 ζ 方向投影：

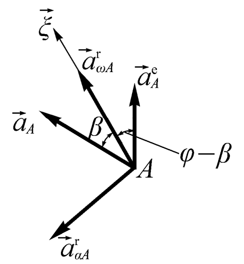
$$a_A \cos\beta = a_{\omega A}^{\mathrm{r}} + a_A^{\mathrm{e}} \cos(\varphi - \beta)$$

$$a_A^{\mathrm{e}} = \frac{a_A \cos\beta - a_{\omega A}^{\mathrm{r}}}{\cos(\varphi - \beta)}$$

$$= 7.45\ \mathrm{cm/s^2}$$ [10 分]



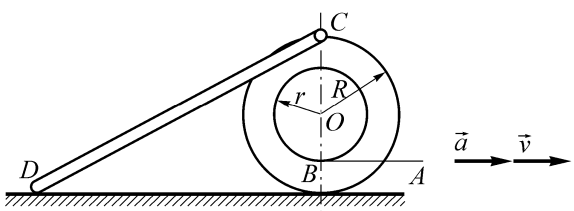
(a)



(b)

三、计算题（15 分）

图示半径为 R 的绕线轮沿固定水平直线轨道作纯滚动，杆端点 D 沿轨道滑动。已知：轮轴半径为 r，杆 CD 长为 $4R$，线段 AB 保持水平。在图示位置时，线端 A 的速度为 $\vec{v}$，加速度为 $\vec{a}$，铰链 C 处于最高位置。试求该瞬时杆端点 D 的速度和加速度。



解：

轮 C 平面运动，速度瞬心 P 点

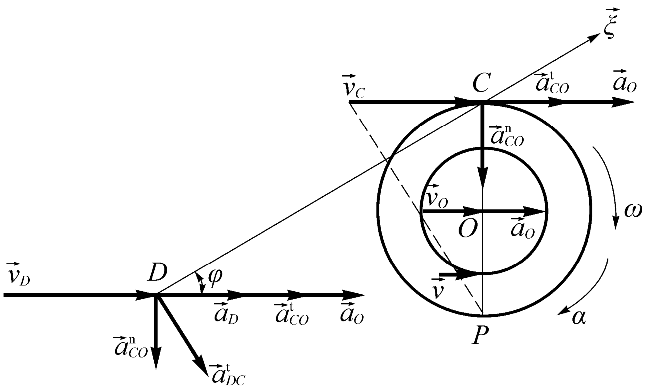
$$\omega = \frac{v}{R-r} \quad （顺钟向）$$

$$\alpha = \frac{a}{R-r} \quad （顺钟向）$$

$$v_O = PO \cdot \omega = \frac{Rv}{R-r}$$

$$v_C = PC \cdot \omega = \frac{2Rv}{R-r} \qquad [3 分]$$

$$\alpha_O = \frac{Ra}{R-r}$$



选 O 为基点 $\vec{a}_C = \vec{a}_O + \vec{a}_{CO}^{\mathrm{n}} + \vec{a}_{CO}^{\mathrm{t}}$

杆 CD 作瞬时平动，$\omega_{CD} = 0$

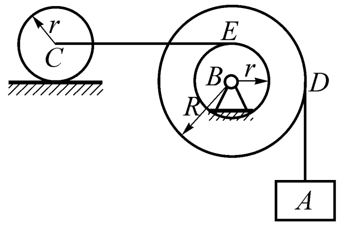
$$v_D = v_C = \frac{2Rv}{R-r} \qquad [8 分]$$

选 C 为基点 $\vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}_{DC}^{\mathrm{t}} = \vec{a}_O + \vec{a}_{CO}^{\mathrm{t}} + \vec{a}_{CO}^{\mathrm{n}} + \vec{a}_{DC}^{\mathrm{t}}$

ξ： $a_D \cos\varphi = a_O \cos\varphi + a_{CO}^{\mathrm{t}} \cos\varphi - a_{CO}^{\mathrm{n}} \sin\varphi$

得 $$a_D = \left[\frac{2Ra}{R-r} - \left(\frac{\sqrt{3}Rv^2}{3(R-r)^2}\right)\right] \quad （方向水平向右） \qquad [15 分]$$

四、计算题（15 分）



在图示机构中，已知：匀质轮 C 作纯滚动，半径为 r，质量为 m_3，鼓轮 B 的内径为 r，外径为 R，对其中心轴的回转半径为 ρ，质量为 m_2，物 A 的质量为 m_1。绳的 CE 段与水平面平行，系统从静止开始运动。试求：

（1） 物块 A 下落距离 s 时轮 C 中心的速度与加速度；

（2） 绳子 AD 段的张力。

解：研究系统：$T_2 - T_1 = \Sigma W_i$

$$\frac{m_3 v_C^{\ 2}}{2} + \frac{1}{2} J_C \omega^2 + \frac{1}{2} J_B \omega^2 + \frac{m_1 v_A^{\ 2}}{2} = m_1 g s \qquad [5 分]$$

式中：$J_C = \frac{1}{2} m_3 r^2$，$J_B = m_2 \rho^2$

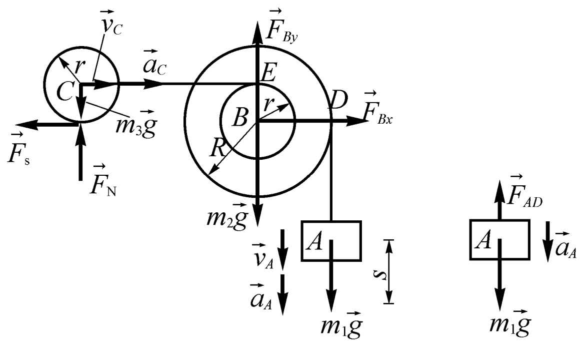
代入得：$v_C = 2r\sqrt{\dfrac{m_1 g s}{2m_1 R^2 + 2m_2\rho^2 + 3m_3 r^2}}$ [7 分]

①式两边对 t 求导得：$a_C = \dfrac{2m_1 g r R}{2m_1 R^2 + 2m_2\rho^2 + 3m_3 r^2}$ [10 分]

对物 A：$m\vec{a} = \Sigma \vec{F}$，即：

$m_1 a_A = m_1 g - F_{AD}$

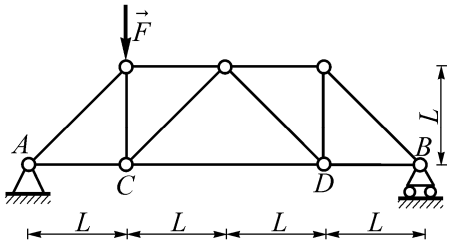
$F_{AD} = m_1 g - m_1 a_A = m_1 g - \dfrac{m_1 R \cdot a_C}{r}$ [15 分]



五、计算题（15 分）

在图示桁架中，已知：F，L。

试用虚位移原理求杆 CD 的内力。



解：

去除 CD 杆，代以内力 $\vec{F}_{CD}$ 和 $\vec{F}'_{CD}$，且 $\vec{F}_{CD}=\vec{F}'_{CD}$，设 $ACHE$ 构架有一绕 A 之虚位移$\delta\theta$，则构架 $BDGF$ 作平面运动，瞬时中心在 I，各点虚位移如图所示，且：$\delta r_E=\sqrt{2}L\delta\theta$，$\delta r_H=\sqrt{5}L\delta\theta=\delta r_D$

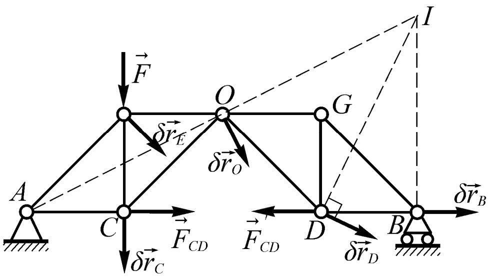
[4 分]

由虚位移原理有：

$$F\sqrt{2}L\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\delta\theta-F'_{CD}\sqrt{5}L\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\delta\theta=0$$ [8 分]

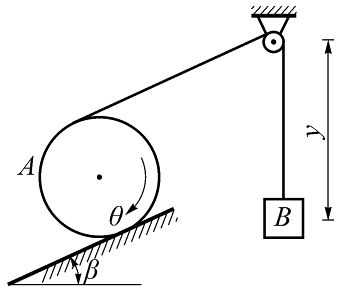
由$\delta\theta$的任意性，得：

$$F'_{CD}=\frac{F}{2}$$ （拉力） [11 分]



[15 分]

六、计算题（15 分）



在图示系统中，已知：匀质圆柱 A 的质量为 m_1，半径为 r，物块 B 质量为 m_2，光滑斜面的倾角为β，滑车质量忽略不计，并假设斜绳段平行斜面。试求 ：

（1） 以θ和 y 为广义坐标，用第二类拉格朗日方程建立系统的运动微分方程；

（2） 圆柱 A 的角加速度 和物块 B 的加速度。

解：

以θ和 y 为广义坐标，系统在一般位置时的动能和势能

$$T=\frac{1}{2}m_2\dot{y}^2+\frac{1}{2}m_1(\dot{y}-\dot{\theta}r)^2+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}m_1r^2)\dot{\theta}^2$$

$$V=-m_2gy+m_1g(y-\theta r)\sin\beta \qquad [8 分]$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}=-m_1(\dot{y}-\dot{\theta}r)r+\frac{1}{2}m_1r^2\dot{\theta}\,, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}=-m_1(\ddot{y}-\ddot{\theta}r)r+\frac{1}{2}m_1r^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial\theta}=0\,, \quad \frac{\partial V}{\partial\theta}=-m_1gr\sin\beta$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{y}}=m_2\dot{y}+m_1(\dot{y}-\dot{\theta}r)\,, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{y}}=m_2\ddot{y}+m_1(\ddot{y}-\ddot{\theta}r))$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}=0\,, \quad \frac{\partial V}{\partial y}=-m_2g+m_1g\sin\beta \qquad [12 分]$$

代入第二类拉格朗日方程得系统的运动微分方程

$$-(\ddot{y}-\ddot{\theta}r)+\frac{1}{2}r\ddot{\theta}-g\sin\beta=0$$

$$m_2\ddot{y}+m_1(\ddot{y}-\ddot{\theta}r)-m_2g+m_1g\sin\beta=0$$

由上解得：

物块 B 的加速度 $\qquad \ddot{y}=\dfrac{(3m_2-m_1\sin\beta)g}{3m_2+m_1}$

圆柱 A 的角加速度 $\quad \ddot{\theta}=\dfrac{2m_2g(1+\sin\beta)}{(3m_2+m_1)r}$ $\qquad$ [15 分]